

Exact Riemann Solution for the Euler Equations with Nonconvex and Nonsmooth Equation of State

Von der Fakultät für Mathematik, Informatik und
Naturwissenschaften der Rheinisch-Westfälischen
Technischen Hochschule Aachen zur Erlangung des
akademischen Grades eines Doktors der
Naturwissenschaften genehmigte Dissertation

vorgelegt von

Diplom-Mathematiker
Alexander Voß

aus Wuppertal

Berichter: Universitätsprofessor Dr.rer.nat. W. Dahmen
Universitätsprofessor Dr.-Ing. J. Ballmann

Tag der mündlichen Prüfung: 21.01.2005

Diese Dissertation ist auf den Internetseiten der Hochschul-
bibliothek online verfügbar.

Zusammenfassung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Lösung des Riemann-Problems für die Euler Gleichungen mit nicht-konvexer und nicht-glatte Zustandsgleichung. Es wird ein explizites Konstruktionsprinzip für die sogenannten Wellenkurven vorgestellt, aus denen die Riemann-Lösung abgeleitet wird. Hierbei werden neben den klassischen Wellentypen auch zusammengesetzte und aufgesplittete Wellen berücksichtigt.

Typisches Beispiel eines Riemann-Problems ist das Stoßrohrproblem, bei dem zunächst zwei Zustände eines Fluids in einem Rohr durch eine Membran getrennt sind. Das Entfernen der Membran führt zur Entwicklung unterschiedlicher Zustände des Fluids in einzelnen, sich bewegenden Regionen, in denen das Fluid komprimiert oder verdünnt ist. Im Gegensatz zum klassischen Fall, bei dem nur Stoß- und Verdünnungswellen auftreten, entstehen durch die hier betrachteten BZT-Fluide weitere Wellentypen, eben die zusammengesetzten oder aufgesplitteten Wellen. Diese werden hervorgerufen durch das Auftreten von Regionen im Phasenraum, in denen die Fundamentalableitung negativ wird sowie durch die Berücksichtigung von Phasengrenzen, hier speziell zwischen flüssigem und gasförmigem Zustand des Fluids bzw. des Naßdampfgebietes.

Im Allgemeinen kann die Lösung des Riemann-Problems in Raum und Zeit als eine Projektion von Wellenkurven im Phasenraum betrachtet werden. Hierbei enthält jede Wellenkurve Zustände, die von dem Ursprung der Welle aus mit einem gewissen Wellentyp erreicht werden können. Sind Anfangsdaten gegeben, so ist die Aufgabe die Wellenkurven so zu konstruieren, daß Anfangs- und Endzustand des Riemann-Problems durch Wellenkurven verbunden sind. Aufgrund der Selbstähnlichkeit des Problems ist dann die Lösung für alle Zeiten bekannt.

Zusammengefasst enthält die Dissertation: (I) ein explizites *Konstruktionsprinzip* für die (Liu-) Entropielösung des Stoßrohr-Problems durch Aufstellen der zugehörigen Wellenkurven; (II) einen *Existenz- und Eindeutigkeitsbeweis* für den neu entstehen Wellentyp der zusammengesetzten Welle; (III) die komplette *algorithmische Beschreibung*, um die analytische Riemann-Lösung und die Wellenkurven zu berechnen; (IV) *Vergleiche der Lösungen* verschiedener numerischer Verfahren mit der analytisch konstruierten Lösung um die Frage zu beantworten, ob und wann etwaig auftretende neue Wellenphänomene durch die Verfahren erfaßt werden.